TITLE:

零次元準素イデアルとNoether作用素アルゴリズム

AUTHOR(S):

田島, 慎一

CITATION:

田島, 慎一. 零次元準素イデアルとNoether作用素アルゴリズム. 数理解析研究所講究録 2004, 1395: 57-63

ISSUE DATE:

2004-10

URL:

http://hdl.handle.net/2433/25927

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録 1395 巻 2004 年 57-63

零次元準素イデアルと Noether 作用素アルゴリズム

田島慎一
SHINICHI TAJIMA
新潟大学工学部情報工学科
NIIGATA UNIVERSITY*

ネター作用素と呼ばれるある種の線形偏微分作用素を用いると, イデアルの重複の仕方を記述できる事が知られている ([2, 3]). また, ネター作用素は多変数留数計算アルゴリズムや多変数多項式剰余公式 ([12]) をはじめ定数係数線形偏微分方程式系論における基本原理 ([2]) 等, 様々な応用を持つ ([7, 9, 11]). 本稿では, 計算代数解析の観点から, 零次元イデアルに付随したネター作用素 ([10]) について考察し, ネター作用素基底がアルゴリズミックに構成可能である事を示す.

1. Noether 作用素とホロノミック系.

この節では, Noether 作用素の概念やその基本的性質等について述べる. この節で与える定義や定理の証明等については論文 [10] を参照されたい.

有理数体 $K=\mathbb{Q}$ 上の n 変数多項式環 $K[x_1,x_2,...,x_n]$ を $K[x]$ で表す. イデアル $I\subset K[x]$ は準素イデアルであり, その $X=\mathbb{C}^n$ における零点集合 $Z=\{x\in X \mid f(x)=0, \forall f\in I\}$ は零次元であるとする. 根基 $\sqrt{I}$ を $\mathfrak{p}$ とおく.

有理数係数多項式を係数とする Weyl 代数 $K[x,\frac{\partial}{\partial x}]$ を D_X で表す. D_X 上, 零次元準素イデアル I で生成される左 D_X-イデアルを D_XI で表し, 対応する左 D_X 加群 M_I を $M_I=D_X/D_XI$ で定める. イデアル I の根基 $\mathfrak{p}$ に対しても同様に, $M_\mathfrak{p}=D_X/D_X\mathfrak{p}$ と定める.

定義 [10] 左 D_X 加群としての準同型写像全体のなす集合 $Hom_{D_X}(M_I,M_\mathfrak{p})$ を零次元イデアル I の Noether 空間と呼ぶ.

$M_I, M_\mathfrak{p}$ は共にホロノミック系であるので, $Hom_{D_X}(M_I,M_\mathfrak{p})$ は有限次元 K ベクトル空間となる.

補題 A $Hom_{D_X}(M_I,M_\mathfrak{p})$ は右 $K[x]/\mathfrak{p}$ 加群の構造を持つ.

定理 1([10]) $l=\dim_K(K[x]/\mathfrak{p})$, $d=\dim_K(K[x]/I)/\dim_K(K[x]/\mathfrak{p})$ とおく. このとき, $Hom_{D_X}(M_I,M_\mathfrak{p})$ の部分集合

$$\{\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_d\}$$

であり次の条件 (N) を満たすものが存在する.

(N) $\quad \forall\rho\in Hom_{D_X}(M_I,M_\mathfrak{p})$, $\exists!\ a_1,a_2,\dots,a_d\in K[x]/\mathfrak{p}$ s.t.

$$\rho=\rho_1a_1+\rho_2a_2+\cdots+\rho_da_d.$$

*tajima@ie.niigata-u.ac.jp

定義 ([10]) 条件 (N) を満たす $\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_d\}$ すなわち, ベクトル空間 $Hom_{D_X}(M_I, M_\mathfrak{p})$ の右 $K[x]/\mathfrak{p}$ 加群としての基底を, Noether 基底と呼ぶことにする.

根基 $\mathfrak{p}$ の生成多項式 $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ を取る. イデアル I の零点集合 Z に台を持つ代数的局所コホモロジー群

$$H^n_{[Z]}(K[x]) = \lim_{k\to\infty} Ext^n_{K[x]}(K[x]/\mathfrak{p}^k, K[x])$$

への自然な写像

$$Ext^n_{K[x]}(K[x]/\mathfrak{p},\ K[x]) \longrightarrow H^n_{[Z]}(K[x])$$

を考える. この写像による Grothendieck symbol

$$\left[\begin{matrix} \det\left(\frac{\partial(p_1,p_2,\ldots,p_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}\right) \\ p_1\ p_2\ \cdots\ p_n \end{matrix} \right] \in Ext^n_{K[x]}(K[x]/\mathfrak{p},\ K[x])$$

の像を δ_Z で表すことにする. この代数的局所コホモロジー類 δ_Z は Z 上のデルタ関数に他ならない.

今, l 個の多項式の組 $\{b_1(x), b_2(x), \ldots, b_l(x)\}$ であり, 剰余空間 $K[x]/\mathfrak{p}$ の K ベクトル空間としての基底を与えるものを取る.

定理 2 集合 $\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_d\} \subset Hom_{D_X}(M_I, M_\mathfrak{p})$ はイデアル I の Noether 基底とする. 各 $i = 1, 2, \ldots, d$ に対し条件 $\rho_i(1) = R_i \bmod D_X\mathfrak{p}$ を満たす偏微分作用素 $R_i \in D_X$ が与えられたとする (ここで, 1 は正確には, $1 \bmod I \in M_I$ を意味している). この時,

$$\{\eta \in H^n_{[Z]}(K[x]) \mid f\eta = 0,\ \forall f \in I\} \cong Hom_{K[x]}(K[x]/I, H^n_{[Z]}(K[x]))$$

は

$$\mathrm{Span}_K\{R_i b_j \delta_Z \mid 1 \le i \le d, 1 \le j \le l\}$$

と等しい.

定義 代表元の組 $\{R_1, R_2, \ldots, R_d\}$ を Noether 作用素基底と呼ぶことにする.

さて, $Ext^n_{K[x]}(K[x]/I,\ K[x]) = Hom_{K[x]}(K[x]/I, H^n_{[Z]}(K[x]))$ が成り立つので, $\{\eta \in H^n_{[Z]}(K[x]) \mid f\eta = 0, \forall f \in I\}$ に属する代数的局所コホモロジー類は $K[x]/I$ 上の線形汎関数とみなすことができる. 代数的局所コホモロジー類 $\eta = R_i b_j \delta_Z$ の多項式 $h(x) \in K[x]$ への作用は, R_i の形式随伴作用素を L_i とおくと

$$\eta(h) = \sum_{\beta\in Z} b_j(\beta)(L_i h)(\beta)$$

で与えられる事になる.

上記の結果と零次元イデアルに対する Grothendieck 双対定理を用いることで次の結果を証明することができる.

定理 3([10]) $\{R_1, R_2, \ldots, R_d\}$ は, イデアル I の Noether 作用素基底であるとする. Noether 作用素 $R_1, R_2, \ldots, R_d$ の形式随伴作用素を $L_1, L_2, \ldots, L_d \in D_X$ とおく. この時, 多項式 $f \in K[x]$ がイデアル I に属する必要十分条件は,

$$L_1 f, L_2 f, \ldots, L_d f \in \mathfrak{p}$$

で与えられる.

即ち, $\{L_1, L_2, \ldots, L_d\}$ は, Ehrenpreis-Palamodov の意味の Noether 作用素に他ならない.

2. 計算アルゴリズム

この節では, Noether 作用素基底の計算法について述べる. まず最初に, アルゴリズム導出の基礎となる事柄を述べる.

論文[10]でも述べた様に, 零次元イデアルに付随するNoether 基底は右 $K[x]/\mathfrak{p}$ ベクトル空間 $Hom_{D_X}(M_I,\ M_\mathfrak{p})$ の基底として定義するのが自然であり本質的である. しかし, Noether 基底を実際に扱う際は, $Hom_{D_X}(M_I,\ M_\mathfrak{p})$ の要素を偏微分作用素の形で表現し様々な計算を行うことになる. 次の補題はNoether 作用素を扱う上で基本的である.

補題 B([8, 10]) 左 D_X 準同型写像 $\rho \in Hom_{D_X}(D_X, D_X)$ に対し $R = \rho(1)$ とおく. このとき, ρ が ($M_I = D_X/D_XI, M_\mathfrak{p} = D_X/D_X\mathfrak{p}$ の下) $Hom_{D_X}(M_I, M_\mathfrak{p})$ の要素を定める必要十分条件は,

$$fR \in D_X\mathfrak{p},\ \forall f \in I$$

で与えられる.

次の補題を利用すると, Noether 作用素を効率的に構成することが可能となる.

補題 C $R \in D_X$ はNoether 作用素であるとする. 各 x_i を零階の偏微分作用素とみなす. この時, R と x_i の偏微分作用素としての交換子積 $[x_i,\ R] \in D_X$ $(i = 1, 2, ..., n)$ も Noether 作用素となる.

Mourrain の論文 [6] の中で, この補題と本質的に同じ内容がMacaulay の Inverse System の枠組みを使って述べてあることを注意しておく.

例 1 $I = <x^3,\ y^2 + xy + x^2>$ とおく. 対応する素イデアルは $\mathfrak{p} = <x, y>$ であり零点集合 Z は原点 $(0, 0)$ のみからなる. 剰余空間 $K[x, y]/I$ は 6 次元のベクトル空間である. まず, 一つの項から成るような Noether 作用素として

$$R_1 = 1, R_2 = (-\frac{\partial}{\partial x}), R_3 = (-\frac{\partial}{\partial y})$$

の 3 つの偏微分作用素を得る. 次に, 補題 B を用いて 2 階の Noether 作用素を求めると

$$R_4 = (-\frac{\partial}{\partial y})^2 - (-\frac{\partial}{\partial x})^2, R_5 = (-\frac{\partial}{\partial x})(-\frac{\partial}{\partial y}) - \frac{1}{2}(-\frac{\partial}{\partial x})^2$$

を得る. 最後に 3 階の Noether 作用素を求める. ここで補題 C を用いると, 3 階の Noether 作用素の主項としては $(-\frac{\partial}{\partial y})^3$ もしくは $(-\frac{\partial}{\partial x})(-\frac{\partial}{\partial y})^2$ のみが可能であることが容易にわかる. 実際に計算することで

$$R_6 = (-\frac{\partial}{\partial x})(-\frac{\partial}{\partial y})^2 - (-\frac{\partial}{\partial x})^2(-\frac{\partial}{\partial y})$$

を得る.

さて, Noether 作用素基底をアルゴリズミックに構成するためには, Noether 作用素に対しその Noether 作用素の代表元となるような偏微分作用素の選び方が一意的になる様にしておくことが望ましい. その為に Gröbner 基底の概念を用いる.

まず, 多項式環 $K[x]$ に項順序 $\succ$ をいれ, イデアル $\mathfrak{p}$ の Gröbner 基底をとる. 剰余空間 $K[x]/\mathfrak{p}$ の単項式基底を $\{b_1(x), b_2(x), ..., b_l(x)\}$ とし $B = \mathrm{Span}_K\{b_1, b_2, ..., b_l\} \subset K[x]$ とする. 与えられた多項式 $h(x) \in K[x]$ に対し $\sum_{k=1}^{l} c_k b_k(x) \in B$ なる多項式で $h(x) - \sum_{k=1}^{l} c_k b_k(x) \in I$ なる条件を満たすものが一意的に存在する. この多項式を $\mathrm{NF}_\succ(h, \mathfrak{p})$ で表す.

偏微分作用素 $R \in D_X$ に対しても同様に $D_X\mathfrak{p}$ を法とした Normal form を導入する．まず，偏微分作用素を

$$R = \sum(-\frac{\partial}{\partial x})^\alpha h_\alpha(x)$$

の形で表しておく．ここで，$h_\alpha(x)$ は D_X に属する零階の偏微分作用素を意味している．$h_\alpha(x)$ の Normal form $\mathrm{NF}_\succ(h_\alpha, \mathfrak{p})$ を取り，$\mathrm{NF}(R, D_X\mathfrak{p})$ を

$$\mathrm{NF}(R, D_X\mathfrak{p}) = \sum(-\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \mathrm{NF}_\succ(h_\alpha, \mathfrak{p})$$

で定める．明らかに，$R - \mathrm{NF}(R, D_X\mathfrak{p}) \in D_X\mathfrak{p}$ が成り立つ．

Normal form の概念を使うと，補題 B の条件は次の様に表せる．

(B) $\mathrm{NF}(fR, D_X\mathfrak{p}) = 0,\ \forall f \in I.$

このことに注目して，

$$NT = \{R = \sum_\alpha(-\frac{\partial}{\partial x})^\alpha h_\alpha(x) \mid h_\alpha \in B,\ \mathrm{NF}(fR, D_X\mathfrak{p}) = 0, \forall f \in I\}$$

とおく．NT は偏微分作用素を用いて $Hom_{D_X}(M_I, M_\mathfrak{p})$ を表現したものに他ならない．$R \in NT, u \in K[x]/\mathfrak{p}$ に対し，$NF(Ru, D_X\mathfrak{p})$ を対応させることで写像 $NT \times K[x]/\mathfrak{p} \longrightarrow NT$ を定める．これにより，NT に右 $K[x]/\mathfrak{p}$ ベクトル空間の構造が自然に入る．

自然数 k に対し，$NT(k) = \{R \in NT \mid \mathrm{ord}(R) \leq k\}$ と定める．この時，補題 C にある $R \in NT(k)$ に関する条件は

(C) $\mathrm{NF}([x_i, R], D_X\mathfrak{p}) \in NT(k-1),\ i = 1, 2, ..., n,$

と表せる．$K[x]/\mathfrak{p}$ は体であるので，$NT(k-1)$ の右 $K[x]/\mathfrak{p}$ ベクトル空間としての基底が与えられていれば条件 C が成り立つか否かは，これらの基底のみを用いて判定できることを注意しておく．

準備が整ったので，NT の右 $K[x]/\mathfrak{p}$ ベクトル空間としての基底 NB を構成するアルゴリズムについて述べる．

まず，多項式環 $K[x]$ 上に項順序をいれ，素イデアル $\mathfrak{p}$ のグレブナ基底を求める．ベクトル空間 $B = \{h \in K[x] \mid \mathrm{NF}_\succ(h, \mathfrak{p}) = h\}$ の単項式基底 $\{b_1, b_2, ..., b_l\}$ を取る．偏微分作用素 $(-\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$ の間に全次数辞書式項順序をいれておく．この項順序に従って，偏微分作用素としての階数が低いような Noether 作用素から逐次構成していく．零階の偏微分作用素 1 は明らかに NT の要素であるので，$NB(0) = \{1\}$ とおく．

以下の手順で各 $k = 1, 2, \ldots$ に対し，$NB(k)$ を逐次求め，NB を構成していく．

Step 0. $NB = NB(0)$ とおく．

Step k.

(0) $NB(k) = \phi$ とする．

(i) 条件 (C) を用いて，Noether 作用素の主項となる可能性のある $(-\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$ を求める．

(ii) (i) で求めた multi index α を項順序の低い方から順に並べ，以下の計算を行う．

まず，α に対し，

$$R = (-\frac{\partial}{\partial x})^\alpha + \sum_{\gamma \prec \alpha}(-\frac{\partial}{\partial x})^\gamma h_\alpha(x)$$

とおく. 但し, $h_\alpha(x) \in B$ とする. 偏微分作用素 R の主項の係数多項式は 1 としている. また, ここで低階項 $(-\frac{\partial}{\partial x})^\gamma$ としては, 既に求めてある Noether 作用素基底の要素の主項となるようなものは, あらかじめ除いておく.

条件 (C) および (B) をみたす R が存在するときは, $NB(k) := NB(k) \cup \{R\}$ とする.

(iii) $NB(k) \neq \phi$ の時は, $NB = NB \cup NB(k)$ とし, 次の Step $k+1$ に進む.

$NB(k) = \phi$ の場合, アルゴリズムの戻り値である NB として, 既に構成してある NB を渡し, 計算を終了する.

例 2([10]) $f_1(x,y) = x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6-4x^4-18x^3y+19x^2y^2-18xy^3-4y^4+23x^2-20xy+23y^2-9$, $f_2(x,y) = (x^2+y^2-5)^3$ とし, 準素イデアル I を $I = < f_1,\ f_2 >$ で定める. $\dim_K K[x,y]/I = 24$ であり, Noether 空間 $Hom_{D_X}(M_I, M_\mathfrak{p})$ は 24 次元 K ベクトル空間となる. 他方 $\dim_K K[x,y]/\mathfrak{p} = 8$ でありイデアル I の重複度 (length) は 3 である. 従って, Noether 基底は 3 個の要素からなる.

根基 $\mathfrak{p}$ の全次数辞書式項順序 $(y \succ x)$ に関する Gröbner 基底は

$$\mathfrak{p} = <110xy + 27x^4 - 135x^2 - 131,\ x^2 + y^2 - 5>$$

で与えられる. 偏微分作用素の間には $(-\frac{\partial}{\partial x}) \succ (-\frac{\partial}{\partial y})$ なる項順序を入れる. 先程述べた手続きに従って Noether 作用素基底を求めていく.

まず, $NB(0) = \{R_1\}$, $R_1 = 1$ とおく.

Step 0. $NB = \{R_1\}$.

Step 1. 条件 B を用いて一階の Noether 作用素基底を求めると,

$$R_2 = (-\frac{\partial}{\partial x}) + (-\frac{\partial}{\partial y})(-\frac{51}{88}x^3y - \frac{1087}{792}x^2 - \frac{177}{88}xy + \frac{3493}{792}),$$

を得るので, $NB(1) = \{R_2\}$, $NB = \{R_1, R_2\}$ とする.

Step 2. 条件 C を用いて 2 階の Noether 作用素を求める.

$$\begin{aligned}R_3 = (-\frac{\partial}{\partial x})^2 &+ (-\frac{\partial}{\partial x})(-\frac{\partial}{\partial y})(-\frac{51}{44}x^3y - \frac{1087}{396}x^2 - \frac{177}{44}xy + \frac{3493}{396}) \\ &+(-\frac{\partial}{\partial y})^2(-\frac{1}{44}x^3y - \frac{565}{1188}x^2 + \frac{7}{22}xy - \frac{1985}{594}) \\ &+(-\frac{\partial}{\partial y})(-\frac{139}{2112}x^2y + \frac{433}{2112}x^3 + \frac{44039}{57024}y - \frac{19037}{14256}x)\end{aligned}$$

を得る. $NB(2) = \{R_3\}$, $NB = \{R_1, R_2, R_3\}$ とする.

今の場合, イデアル I の Noether 作用素基底は 3 個の偏微分作用素からなることがあらかじめ分かっているので, ここで計算を終了することができる. 実際, 次の Step を実行すると $NB(3) = \phi$ となり計算の終了条件が満たされていることが確認できる

補足 イデアル I の Gröbner 基底は

- $11y^4 - 18xy^3 + (49x^2 - 52)y^2 + (-18x^3 - 20x)y + 11x^4 - 52x^2 + 116$,
- $(-4860x^3 - 9658x)y^3 + (-1026x^4 + 38925x^2 + 21153)y^2$
  $+(486x^5 - 9118x^3 - 47828x)y - 297x^6 + 1404x^4 + 18021x^2 - 22187$,

- $(3686752x^2 + 1903770)y^3 + (2162754x^5 - 5488515x^3 - 11930727x)y^2$
  $+(-823284x^6 - 575198x^4 + 7993982x^2 - 1996830)y$
  $+486783x^7 - 1431936x^5 - 2492859x^3 + 12855413x,$
- $6105438xy^3 + (3466584x^4 - 8967901x^2 - 215915)y^2$
  $+(-288684x^7 - 61182x^5 + 8397090x^3 - 40928724x)y$
  $-208494x^8 + 5099787x^6 - 28907010x^4 + 50784331x^2 + 17252573,$
- $(797637680x^2 - 907610814)y^3 + (-1458602591x^3 + 4886310707x)y^2$
  $+(-675315036x^6 + 7125528986x^4 - 17415047846x^2 - 2419191918)y$
  $-58394358x^9 + 956391381x^7 - 4549324230x^5$
  $+3373418249x^3 + 13676523779x$

で与えられる．イデアル I の Noether 作用素基底（の形式随伴作用素）と素イデアル $\mathfrak{p}$ のグレブナ基底を用いてイデアル I を特徴付けると，イデアル I のグレブナ基底を用いるよりも簡潔な記述を与えることが出来る．たとえば, membership problem の実際の計算等では, Noether 作用素基底を利用する判定法の方が効率的であると思われる．

3. 準素イデアル分解

I が一般の零次元イデアルであるとする．I の根基 $\mathfrak{P}$ の素イデアル分解 $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m$ は既知であるとする．イデアル I の準素イデアル分解を $I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_m$ とおく．次が成立する．

補題　偏微分作用素 R が素イデアル $\mathfrak{p}_i$ に対応する準素イデアル I_i の Noether 作用素となる必要十分条件は

$$fR \in D_X\mathfrak{p}_i, \ \forall f \in I$$

で与えられる．

従って，条件 $\mathrm{NF}(fR, D_X\mathfrak{p}_i) = 0$, $\forall f \in I$ を用いると零次元イデアルの準素イデアル分解をせず, Noether 作用素基底を直接構成できることになる．

参　考　文　献

[1] J.-E. Björk, Rings of Differential Operators, North-Holland, 1979.

[2] L. Ehrenpreis, Fourier Analysis in Several Complex Variables, Wiley-Interscience Publishers, 1970.

[3] W. Gröbner, Algebraische Geometrie II, Hochschultaschenbücher, 1970.

[4] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Third revised edition (1990), North Holland.

[5] A. A. Iarrobino, Associated Graded Algebra of a Gorenstein Artin Algebra, Memoires of AMS **514** (1994).

[6] B. Mourrain, Isolated points, duality and residues, J. of Pure and Applied Alg. , **117 & 118** (1997), 469–493.

[7] 田島慎一, Holonomic な定数係数線形偏微分方程式系と Grothendieck Duality, 京都大学数理解析研究所講究録「積分核の代数解析的研究」掲載予定

[8] 田島慎一, 代数的局所コホモロジー類のローラン展開と L. Ehrenpreis の Noether 作用素, 京都大学数理解析研究所講究録 **1138**「数式処理における理論と応用の研究」(2000), 87–95 .

[9] S. Tajima, Exponential polynomials and the Fourier-Borel transforms of algebraic local cohomology classes, in Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis, eds. by T. Kawai and K. Fujita, World Scientific. (2002), 284–296.

[10] 田島慎一, 零次元イデアルのネター作用素について, 京都大学数理解析研究所講究録「方程式系の超局所解析と漸近解析」掲載予定.

[11] 田島慎一, 確定特異点型ホロノミック系の零次元代数的局所コホモロジー解, 京都大学数理解析研究所講究録 **1336**「双曲型方程式と非正則度」(2003), 121–132.

[12] 田島慎一, 中村弥生, Hermite-Jacobi 再生核の計算代数解析, 京都大学数理解析研究所講究 **1352** 「再生核の理論の応用」(2004), 1–10.